Beweis des Newton'schen lehrsatzes über die Entwicklung der Potenzen des Binoms für die Fälle, in denen die Exponenten keine ganzen Zahlen sind *

Leonhard Euler

§1 Dieser für gewöhnlich so dargestellte Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-1}b^{n-2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-2}b^3 + \text{etc.}$$

sofern er vollkommen allgemein zu sein und unter der dem Exponenten n gänzlich alle möglichen Zahlen zu erfassen angesehen wird, legt das Fundament der ganzen höheren Analysis fest; daher ist es notwendig, dass seine Gültigkeit vollkommen streng gezeigt wird. Aber die Art und Weise, auf welche zu diesem Lehrsatz gelangt worden ist, während die Größe $a+b$ einige Male mit sich selbst multipliziert zu werden pflegt, dass für den Exponenten n keine anderen Zahlen hervorgehen, außer die ganzzahlig positiv sind, weil

*Originaltitel: "Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 19* 1775, pp. 103-111", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 207 - 216 ", Eneström-Nummer E465, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" ja durch ununterbrochenes Multiplizieren mit derselben Größe $a + b$ keine anderen Potenzen entspringen können, außer deren Exponenten die Anzahl der Faktoren anzeigen, welche Zahl zwangsweise ganzzahlig sein muss. Dennoch scheint indes kaum jemand bezweifelt zu haben, dass, wenn diese Formel für all ganzen anstelle von n angenommenen Zahlen wahr war, dieselbe auch für gänzlich alle entweder gebrochenen oder sogar irrationalen Zahlen wahr ist; obwohl diese Schlussfolgerung in diesem Fall ihre Richtigkeit hat, passiert dies dennoch wegen anderer Gründe, weil ja Fälle solcher Art dargeboten werden können, in welchen eine gewisse Formel als wahr entdeckt wird, sooft der Exponent n eine ganze positive Zahl war, dieselbe aber keinesfalls Geltung haben kann, sobald demselben Exponenten gebrochene Werte zugeteilt werden.

§2 Um dies an einem Beispiel zu illustrieren, sei die folgende Reihe vorgelegt

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$
$$+ \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})}{1-a^4} + \text{etc.},$$

deren Wert, sooft der Exponent n eine ganze positive Zahl war, immer diesem Exponenten n gleich entdeckt wird, und dennoch ist es daher nicht möglich zu schließen, dass diese Gleichheit besteht, während für n andere Zahlen angenommen werden; aber diese Eigenschaft hat auch Geltung, wenn man $n = 0$ nimmt; dann verschwindet nämlich wegen $a^n = 1$ sofort der erste Term mit allen folgenden, die selbstredend den Faktor $1 - a^n = 0$ haben, sodass in diesem Fall unsere Reihe $= 0$ wird, das heißt dem Exponenten $n = 0$ gleich; dann wird aber nach Nehmen von $n = 1$ der erste Term

$$\frac{1-a}{1-a} = 1,$$

aber der zweite Term verschwindet wegen $1 - a^{n-1} = 0$ zusammen mit allen folgenden, so dass in diesem Fall $n = 1$ die Reihe selbst $= 1$ wird. Wir wollen noch den Fall $n = 2$ betrachten, in welchem der erste Term wird

$$\frac{1-a^2}{1-a} = 1+a,$$

aber der zweite Term liefert

$$\frac{(1-a^2)(1-a)}{1-a^2} = 1-a,$$

der dritte Term wird hingegen wegen des Faktors $1 - a^{n-2} = 0$ zusammen mit allen folgenden verschwinden, woher die Summe unserer Reihe $= 2$ sein wird, dass heißt n selbst gleich. Wir wollen noch $n = 3$ setzen und der erste Term wird geben

$$\frac{1-a^3}{1-a} = 1+a+a^2,$$

der zweite Term liefert hingegen

$$\frac{(1-a^3)(1-a^2)}{1-a^2} = 1-a^3$$

und der dritte

$$\frac{(1-a^3)(1-a^2)(1-a)}{1-a^3} = 1-a-aa+a^3,$$

aber der vierte und alle folgenden, weil sie den Faktor $1 - a^{n-3} = 0$ enthalten, verschwinden, woher unsere Reihe in diesem Fall $n = 3$ auch $= 3$ wird. Und auf die gleiche Weise kann gezeigt werden, welche ganze Zahl auch immer anstelle von n angenommen wird, dass unsere Reihe derselben Zahl gleich hervorgehen wird; aber jeder wird leicht erkennen, wenn $n = \frac{1}{2}$ genommen werden würde, dass diese Reihe im höchsten Maße vom Wert $\frac{1}{2}$ abweichen wird.

§3 Weil sich also über diese Formel

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

versichern lässt, dass sie immer wahr ist, sooft n eine ganze positive Zahl ist, aber diese Gleichheit dennoch für andere Zahlen nicht Geltung hat, wird sich auch mit Recht bezweifeln lassen, ob dieser Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-1}b^{n-2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-2}b^3 + \text{etc.}$$

auch vollkommen allgemein mit der Wahrheit verträglich ist, auch wenn wir gewiss sind, dass er wahr ist, sooft der Exponent n eine ganze positive Zahl war. Deswegen ist es natürlich umso mehr notwendig, dass diese Wahrheit mit einem strengen Beweis untermauert wird. Ich für meine Person hatte einst einen aus der Analysis des Unendlichen hergeholten Beweis angegeben; aber weil diese Analysis selbst auf unseren Lehrsatz gestützt ist, sehe ich ihn, weil er dieses Prinzip verlangte, als vollkommen zu verwerfen an; einen von diesem Mangel freien Beweis hat das illustre Mitglied unserer Akademie AEPINUS in TOMO VIII NOVOR. COMMENTAR. gegeben, wo er, für die Formel $(x+1)^n$ die allgemeine Reihe

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.}$$

annehmend, mit einer überaus geistreichen Methode die Werte einiger Koeffizienten A, B, C, D etc. gefunden hat und aus deren Übereinstimmung mit der NEWTON'SCHEN Reihe ohne Zweifel dann in herkömmlicher Weise schließen konnte, dass auch alle übrigen der Regel konform sein werden; dennoch ist indes dieser wunderbare Beweis sehr stark auf die Induktion gestützt, zusätzlich sollte aber auch bemerkt werden, dass der zweite Koeffizient B aus dieser Methode keine Bestimmung erhalten hat, sondern er diese aus anderen nicht unwesentlich im Verborgenen liegenden und versteckten Bedingungen entnommen hat. Daher bin ich mir sicher, dass mein Beweis den Geometern umso mehr gefallen wird, weil in selbigen der nichts auf der Induktion fußt.

§4 Aber vor allem , weil gilt

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

wird auch sein

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

und so wird die ganze Aufgabe auf die Entwicklung dieser Potenz zurückgeführt

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n,$$

welche weiter durch Setzen von $\frac{b}{a}=x$ auf diese $(1+x)^n$ zurückgeht, von welcher wir wissen, sooft der Exponent n eine ganze positive Zahl war, dass sie dieser Reihe gleich sein wird

$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^4+\text{etc.};$$

aber, wenn n keine ganze positive Zahl war, wollen wir den Wert dieser Reihe als unbekannt ansehen und an ihrer Stelle dieses Zeichen $[n]$ gebrauchen, so dass wir nun im Allgemeinen haben

$$[n]=1+\frac{n}{1}x+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.},$$

über welche wir auch nun mehr nicht mehr wissen, als dass sie im Fall, in dem n eine ganze positive Zahl ist, sein wird

$$[n]=(1+x)^n;$$

aber welche Werte in den übrigen Fällen diesem Zeichen $[n]$ zukommen, wollen wir auf die folgende Weise ausfindig machen; erst daher wird klar zutage treten, dass auch im Allgemeinen sein wird

$$[n] = (1+x)^n,$$

welche Zahlen auch immer für den Exponenten n angenommen werden, auf welche Weise wir unser Vorhaben vollkommen in die Tat umgesetzt hätten.

§5 Um diese Untersuchung durchzuführen, wollen wir zwei Reihen von dieser Art oder zwei solche Zeichen $[n]$ und $[m]$ miteinander multiplizieren, dass wir eine diesem Produkt $[m] \cdot [n]$ gleiche Reihe erhalten, welche leicht klar ist, dass die mit einer Form von dieser Art ausgedrückt werden wird

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.};$$

damit klar wird, wie deren Koeffizienten A, B, C, D, E etc. durch die zwei Buchstaben m und n bestimmt werden, wollen wir Multiplikation zumindest beginnen:

$$\begin{aligned}
[m] \quad &= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}x^2 + \text{etc.},\\
[n] \quad &= 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}x^2 + \text{etc.},\\
[m] \cdot [n] &= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}x^2 + \text{etc.},\\
&\quad + \frac{n}{1}x + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1}x^2 + \text{etc.},\\
&\quad + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}x^2 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn wir daher nun dieses begonnene Produkt mit der angenommenen Form

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.},$$

mit welchem wir dasselbe Produkt ausgedrückt zu werden festgelegt haben, vergleichen, wird sofort eingesehen, dass sein wird

$$A = m + n \quad \text{und} \quad B = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{1}$$

oder

$$B = \frac{mm - m}{2} + mn + \frac{nn - n}{2},$$

woher wird

$$B = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2}.$$

§6 So wie es hier möglich gewesen ist, die zwei ersten Koeffizienten A und B durch die Buchstaben m und n zu bestimmen, so ist es offenbar, wenn die obere Multiplikation weiter fortgesetzt werden würde, dass daher die folgenden Koeffizienten C, D, E etc. durch dieselben Buchstaben m und n definiert werden können, obwohl die Rechnung bald ziemlich aufwendig werden würde, dass sie größte Mühe erfordern würde. Dennoch können wir indes daher sicher schließen, dass gänzlich alle Koeffizienten A, B, C, D, E etc. auf gewisse Weise durch die zwei Buchstaben m und n bestimmt werden müssen, auch wenn wir die Art an sich, auf welche ein jeder durch diese Buchstaben bestimmt wird, noch nicht kennen; hier sollte aber besonders bemerkt werden, dass diese Zusammensetzungsweise nicht von der natürlichen Beschaffenheit der Buchstaben m und n abhängt, sondern es sich so verhalten wird, ob diese Buchstaben m und n ganze Zahlen bezeichnen oder irgendwelche anderen Zahlen. Es soll aber sittsam angemerkt sein, dass diese Schlussweise nicht allgemein in Gebrauch gekommen ist, weil ja die ganze Kraft unseres Beweis darauf gestützt ist.

§7 Daher wird uns ein leichter Weg eröffnet, die wahren Werte aller Koeffizienten A, B, C, D, E etc. zu finden, während wir natürlich die Buchstaben m und n als ganze Zahlen ansehen, weil ja daher dieselben Bestimmungen entspringen, als wenn sie irgendwelche andere Zahlen bezeichnet hätten. Nachdem aber die Buchstaben m und n als ganze Zahlen angesehen worden sind, werden wir natürlich haben

$$[m] = (1+x)^m \quad \text{und} \quad [n] = (1+x)^n,$$

woher das Produkt dieser Formeln sein wird

$$[m] \cdot [n] = (1+x)^{m+n},$$

nun wird aber diese Potenz in diese Reihe entwickelt werden

$$1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2}x^2 + \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{\cdot} \frac{m+n-2}{3}x^3 + \text{etc.}$$

Nun muss also, wenn wir die Buchstaben m und n im Allgemeinen betrachten, diese Reihe mit diesem Zeichen $[m+n]$ angezeigt werden, woher wir dieser vortreffliche Wahrheit erlangen, dass immer gilt

$$[m] \cdot [n] = [m+n],$$

welche Zahlen auch immer anstelle dieser Buchstaben verwendet werden.

§8 Weil also zwei Formeln von dieser Art $[m]$ und $[n]$ miteinander multipliziert diese einfache Formeln derselben Gestalt liefern, so werden auch mehrere Formeln von solcher Art miteinander multipliziert auf eine einfache zurückgeführt werden; wir werden natürlich die folgenden Reduktionen haben

$$[m]\cdot[n]=[m+n],$$
$$[m]\cdot[n]\cdot[p]=[m+n+p],$$
$$[m]\cdot[n]\cdot[p]\cdot[q]=[m+n+p+q]$$
$$\text{etc.};$$

daher, wenn diese Zahlen m, n, p, q etc. einander gleich genommen werden, natürlich $=m$, werden wir die folgenden Reduktionen der Potenzen erhalten

$$[m]^2=[2m],\quad [m]^3=[3m],\quad [m]^4=[4m]\quad \text{etc.}$$

woher allgemein sein wird

$$[m]^a=[am],$$

während a irgendeine ganze Zahl bezeichnet.

§9 Nachdem diese Dinge im Voraus bemerkt worden sind, bezeichne der Buchstabe i irgendeine ganze positive Zahl und wir wollen zuerst $2m=i$ setzen, dass $m=\frac{i}{2}$ ist, und die erste der letzten Formeln wird geben

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2=[i];$$

weil aber i eine ganze Zahl ist, wird gelten

$$[i]=(1+x)^i$$

(siehe §4) und so wird sein

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = (1+x)^i,$$

woher durch Ziehen der Quadratwurzel wird

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = (1+x)^{\frac{i}{2}}$$

und so haben wir nun nur erhalten, dass der NEWTON'SCHE Lehrsatz auch in den Fällen wahr ist, in denen der Exponent n ein Bruch von dieser Art ist $\frac{i}{2}$.

§10 Wenn wir auf die gleiche Weise $3m = i$ setzen, dass $m = \frac{i}{3}$ ist, liefert die andere der oberen Formeln

$$\left[\frac{i}{3}\right]^3 = [i] = (1+x)^i;$$

daher erlangen wir durch Ziehen der Wurzel

$$\left[\frac{i}{2}\right] = (1+x)^{\frac{i}{3}}$$

und so ist unser Lehrsatz auch wahr, wenn der Exponent n ein Bruch von dieser Art war $\frac{i}{3}$; und daher ist es offenbar, dass im Allgemeinen sein wird

$$\left[\frac{i}{a}\right] = (1+x)^{\frac{i}{a}},$$

sodass unser Lehrsatz nun schon bewiesen worden ist wahr zu sein, wenn für den Exponenten n irgendein Bruch $\frac{i}{a}$ angenommen wird, woher die Gültigkeit schon für alle positiven anstelle des Exponenten n anzunehmenden Zahlen dargetan worden ist.

§11 Es ist also nur übrig, dass die Gültigkeit auch für die Fälle gezeigt wird, in denen der Exponent n eine negative Zahl ist. Für dieses Ziel wollen wir die zuerst gefundene Reduktion zur Hilfe nehmen

$$[m] \cdot [n] = [m+n],$$

wo m eine positive Zahl ist, ob ganzzahlig oder gebrochen, so dass, wie wir gerade gezeigt haben, gilt

$$[m] = (1+x)^m;$$

des Weiteren werde aber $n = -m$ gesetzt und es wird $m + n = 0$ sein und daher

$$[0] = (1+x)^0 = 1,$$

nach Einsetzen welcher Werte die obere Formel dies an die Hand gibt

$$(1+x)^m \cdot [-m] = 1,$$

woher wir erschließen

$$[-m] = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m};$$

und so ist Newton'sche Lehrsatz bewiesen worden, auch wahr zu sein, wenn der Exponent n irgendeine negative Zahl war; und daher ist dieser Lehrsatz nun freilich mit strengsten Begründungen bestätigt worden.